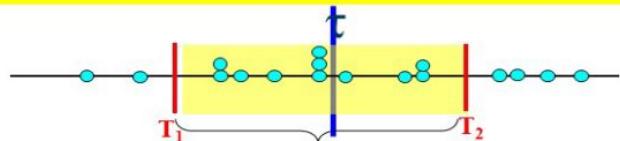


INTERVALOVÉ ODHADY PARAMETRŮ ZÁKLADNÍHO SOUBORU

Interval spolehlivosti pro parametr τ při hladině významnosti $\alpha \in (0,1)$ je určen statistikami T_1 a T_2 :

$$P(T_1 \leq \tau \leq T_2) = 1 - \alpha$$

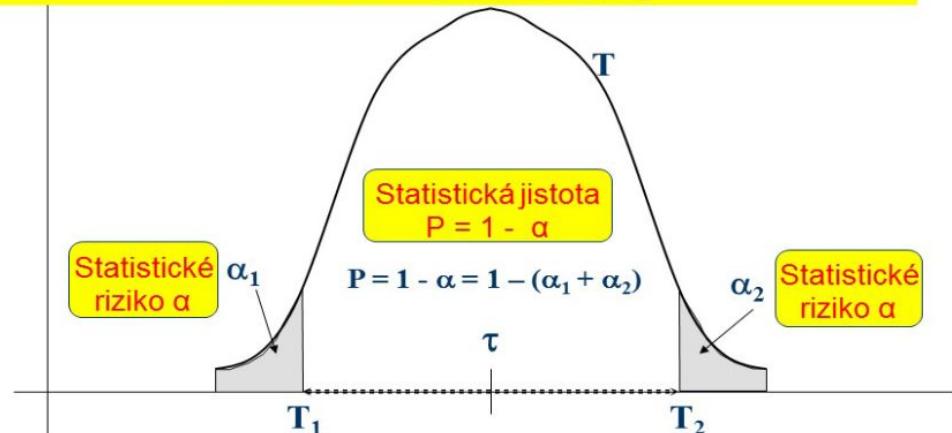
Bodový odhad neznámé střední hodnoty μ vypočítaný z prvků výběru.
Nevíme nic o jeho vztahu ke skutečné střední hodnotě.



Intervalový odhad neznámé střední hodnoty za předpokladu, že s pravděpodobností $P=1-\alpha$ leží μ kdekoli v tomto úseku číselné osy

INTERVALOVÉ ODHADY PARAMETRŮ ZÁKLADNÍHO SOUBORU

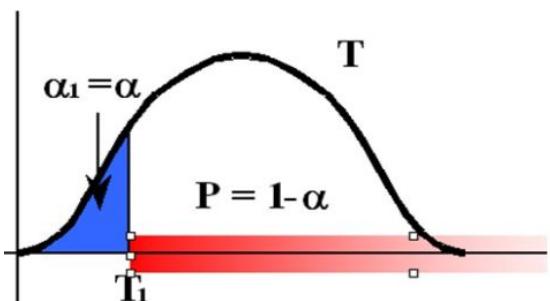
α_1 a α_2 představují statistické riziko, že skutečná hodnota parametru τ bude ležet mimo hranice T_1 a T_2



JEDNOSTRANNÉ INTERVALOVÉ ODHADY

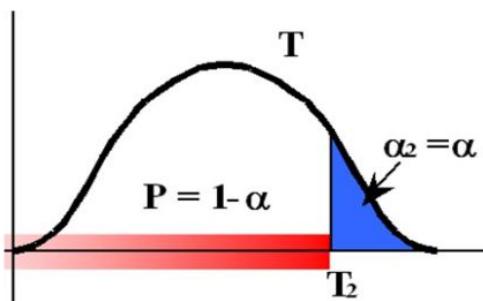
Levostranný odhad

$$P(\tau > T_1) = 1 - \alpha$$

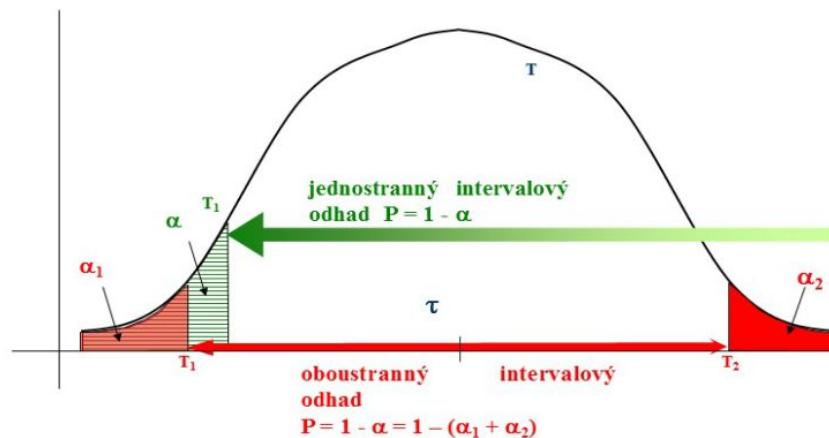


Pravostranný odhad

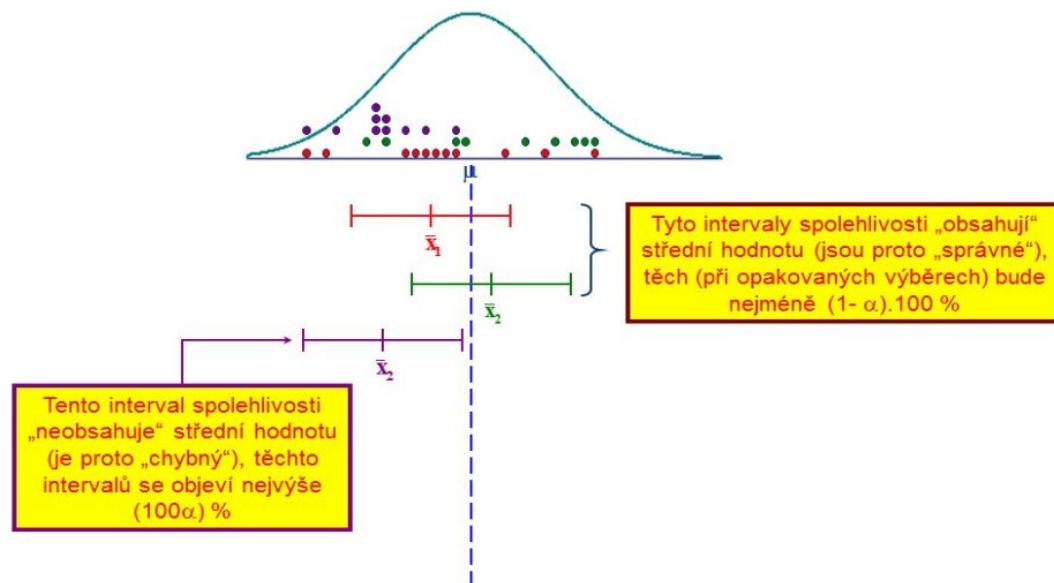
$$P(\tau < T_2) = 1 - \alpha$$



POROVNÁNÍ JEDNOSTRANNÉHO A OBOUSTRANNÉHO ODHADU



HLADINA VÝZNAMNOSTI α V INTERVALOVÝCH ODHADECH



INTERVAL SPOLEHLIVOSTI STŘEDNÍ HODNOTY μ

② Není známa směrodatná odchylka σ základního souboru anebo je používán pouze malý výběr, tj. výběr pouze do 30 prvků)

Platí, že veličina $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ má t -rozdělení s $n - 1$ stupni volnosti

$$\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$t_{\alpha/2, n-1}$ je kvantil Studentova t -rozdělení pro hladinu významnosti $\alpha/2$ a $(n - 1)$ stupňů volnosti

INTERVAL SPOLEHLIVOSTI STŘEDNÍ HODNOTY μ

① Je známa směrodatná odchylka σ základního souboru nebo je používán velký výběr, tj. výběr nad 30 prvků.

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dolní hranice LD Horní hranice LH

U velkého výběru lze použít místo σ výběrovou směrodatnou odchylku s

$Z_{\alpha/2}$ je kvantil normovaného normálního rozdělení pro hladinu významnosti $\alpha/2$

INTERVAL SPOLEHLIVOSTI STŘEDNÍ HODNOTY μ

③ Velikost základního souboru je známa N a výběr je relativně velký, protože $n > 5 \% N$:

Pak se používá se **korekce pro původní základní soubor**:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$$

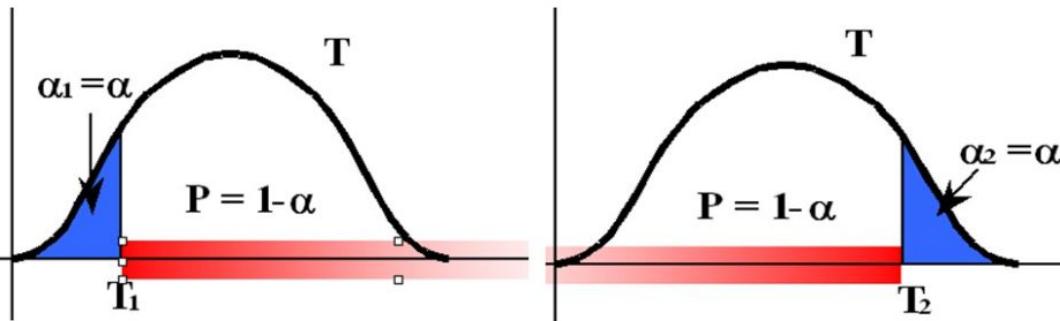
Účelem korekce je zmenšit **standardní chybu \bar{x}** .

INTERVAL SPOLEHLIVOSTI STŘEDNÍ HODNOTY μ

④ Jednostranné intervaly

Jednostranné intervaly se počítají podle stejných vztahů jako oboustranné, pouze **hladina významnosti je α místo $\alpha/2$** ,

(Veškeré statistické riziko „chybného“ intervalu je zde na jedné straně)



INTERVAL SPOLEHLIVOSTI SMĚRODATNÉ ODCHYLKY σ

① Pro malé výběry $n < 20$ prvků:

Interval spolehlivosti odhadu směrodatné odchylky S dle χ^2 -rozdělení je nesouměrný, zvláště je markantní u odhadů u malých výběrů.

$$\sqrt{\frac{n \cdot S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{n \cdot S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}}$$

FAKTORY K OVLIVNĚNÍ VELIKOSTI INTERVALU SPOLEHLIVOSTI (IS)

- ◆ **Velikost výběru:** Platí, že čím větší výběr n , tím užší IS.
- ◆ **Hladina významnosti α :** Platí, že čím vyšší je hodnota α , tím užší interval. Nižší hladina významnosti (např. 0,01 místo 0,05) znamená požadavek vyšší spolehlivosti určení IS:
 - ◆ 1) Pokud určíme $\alpha = 0.01$, požadujeme spolehlivost IS $P = 99\%$.
 - ◆ 2) Pokud určíme $\alpha = 0.05$, požadujeme spolehlivost IS $P = 95\%$, a pak IS musí být širší pro $P = 99\%$ než pro $P = 95\%$, a musíme zaručit potom vyšší spolehlivost.
- ◆ **Variabilita:** Platí, že čím vyšší je hodnota směrodatné odchylky, tím širší IS).
- ◆ **Použitý vzorec:** Platí, že pro t -rozdělení je IS širší než pro Gaussovo rozdělení $N(0,1)$. Především je rozdíl markantní u malých výběrů.

INTERVAL SPOLEHLIVOSTI SMĚRODATNÉ ODCHYLKY σ

② Pro velké výběry $n > 30$ prvků:

Interval spolehlivosti směrodatné odchylky S pro velké výběry dle normovaného normálního rozdělení a je souměrný.

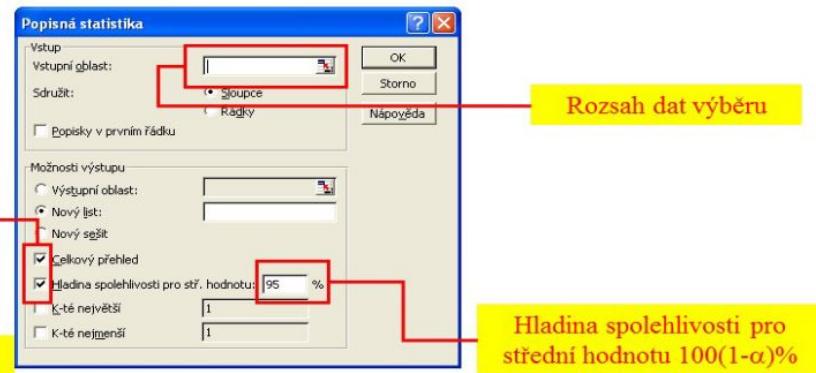
$$\sigma = S \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{2n}}$$

$z_{\alpha/2}$ je kvantil normovaného normálního rozdělení pro hladinu významnosti $\alpha/2$

INTERVALY SPOLEHLIVOSTI – PROVEDENÍ V EXCELU

① Interval spolehlivosti střední hodnoty:

a) V Excelu pomocí doplňku **Analýza dat**: vyplňte dle vzoru



INTERVALY SPOLEHLIVOSTI – PROVEDENÍ V EXCELU

② Pomocí funkce CONFIDENCE:



Způsob ① počítá interval spolehlivosti podle vzorce $t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

Způsob ② počítá interval spolehlivosti podle vzorce $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

VELIKOST VÝBĚRU

Obecně platí pravidlo: **Čím větší výběr, tím lepší odhad.**

Nejlepší je žádný výběr a použít přímo základní soubor.

Obvyklá otázka:

Jakou **minimální** velikost výběru n je třeba vzhledem k mému **účelu analýzy** a k **požadované vypovídací schopnosti** o základním souboru?

Které kritérium si proto zvolíme?

Jedním z nabízených kritérií velikosti výběru je **požadovaná přesnost a spolehlivost odhadu parametru** (nejčastěji odhadu střední hodnoty).

VELIKOST VÝBĚRU

① Jaká bude **maximální povolená „vzdálenost“ mezi odhadem parametru a skutečným parametrem ?**

Odpověď: Je to **přesnost odhadu**, značená D.

② Jakou požadujeme **spolehlivost**, že skutečná vzdálenost mezi **odhadem a skutečným parametrem bude menší nebo nejvýše rovna D**?

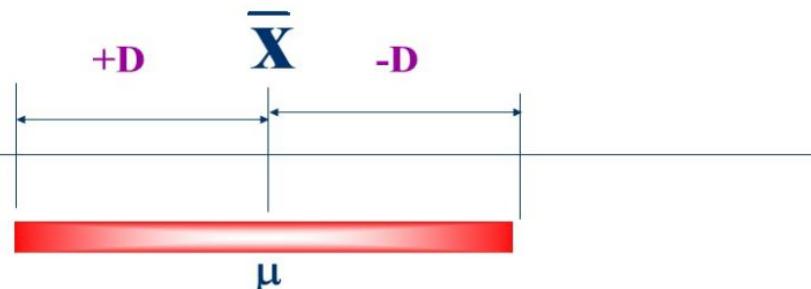
Odpověď: Je to **spolehlivost odhadu** $100(1 - \alpha)$. Proto je třeba nejprve určit **hladinu významnosti α** .

③ Jaká je **variabilita základního souboru** (většinou ji neznáme, je nutné použít co nejpřesnější odhad).

Odpověď: Určí se pomocí **rozptylu (S^2)** nebo **variačního koeficientu CV (%)**.

VELIKOST VÝBĚRU ZALOŽENÁ NA INTERVALU SPOLEHLIVOSTI μ

Jak velký výběr n ze souboru o rozptylu S^2 je **minimálně** třeba, aby s **statistickou jistotou $100(1-\alpha) \%$** byla **střední hodnota μ** v intervalu $\bar{X} \pm D$ (čili výběrový průměr \pm přesnost odhadu)?



Konstrukce intervalových odhadů

Postup konstrukce intervalu spolehlivosti střední hodnoty μ normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

1. Nejlepším bodovým odhadem střední hodnoty μ je výběrový průměr \bar{x} s rozdělením $N(\mu, \sigma^2/n)$, pak v intervalu $\bar{x} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ leží přibližně 95% hodnot náhodných veličin výběru o rozsahu n ,

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Hodnota 1.96 je totiž $100(1 - 0.05/2) = 97.5\%$ ní kvantil normovaného Gaussova normálního rozdělení $u_{0.975}$.

VELIKOST VÝBĚRU ZALOŽENÁ NA INTERVALU SPOLEHLIVOSTI μ

$$n = t_{\alpha/2}^2 \cdot \frac{S^2}{D^2}$$

$t_{\alpha/2}$ kvantil t -rozdělení pro hladinu významnosti $\alpha/2$ a pro $n - 1$ stupňů volnosti.

Pro první approximaci se n pouze odhadne.

Pro druhou se počítá s výsledným $(n - 1)$ z 1. approximace a pokračuje se iteračně tak dlouho, dokud se n mění.

Pro velké výběry lze použít místo $t_{\alpha/2}$ přímo $z_{\alpha/2}$.

2. **V praxi neznáme** směrodatnou odchylku σ . Jelikož má

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$$
 Studentovo t -rozdělení, platí

$$P(-t_{1-\alpha/2}(v) \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} \leq t_{1-\alpha/2}(v)) = 1 - \alpha$$

kde $t_{1-\alpha/2}(v)$ je $100(1 - \alpha/2)\%$ ní kvantil Studentova rozdělení s $v = n - 1$ stupni volnosti.

100(1 - α)% int. spolehlivosti střední hodnoty μ

bude $\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(v) \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(v) \frac{s}{\sqrt{n}}$

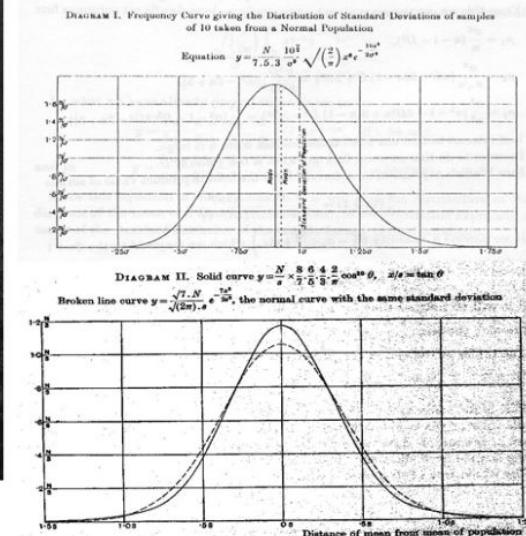
Meze int. spol. závisí vedle chyby s i na rozsahu výběru n . Pro větší rozsahy výběru ($n > 30$) lze použít místo kvantilu $t_{1-\alpha/2}$ kvantilu normovaného normálního rozdělení $u_{1-\alpha/2}$.



'Student' in 1908

Gosset, William Sealy ("Student"),
1876-1937

The probable error of a mean [Paper on the
t-test], *Biometrika* 6 (1908), pp. 1-25



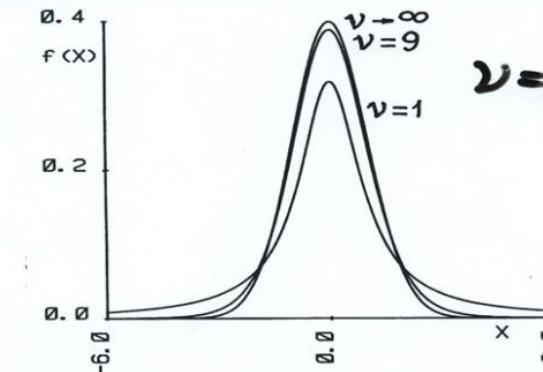
Obecně: 100(1 - α)%ní int. spolehlivosti parametru Θ
se vypočte dle asymptotického vztahu

$$\hat{\Theta} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{D(\hat{\Theta})} \leq \Theta \leq \hat{\Theta} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{D(\hat{\Theta})}$$

100(1 - α)%ní oboustranný interval spolehlivosti rozptylu σ^2 se vypočte dle

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

kde $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ je horní a $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ dolní kvantil rozdělení χ^2 .



Studentovo rozdělení pro stupně volnosti $v = 1, v = 9$ a normální rozdělení

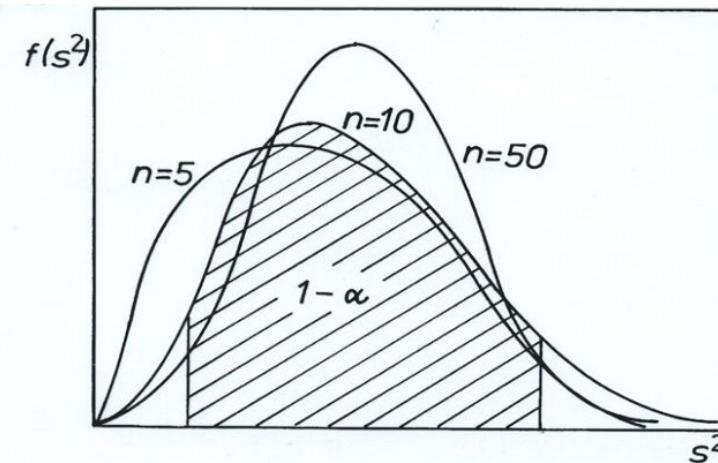
Pro výběry pocházející z **normálního rozdělení** platí, že náhodná veličina

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$$

má **Studentovo rozdělení** s $(n - 1)$ stupni volnosti a že náhodná veličina

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

má **χ^2 -rozdělení** s $(n - 1)$ stupni volnosti.



Závislost intervalu spolehlivosti a výběrového rozptylu na velikosti výběru

Interval spolehlivosti mediánu se přibližně vyčíslí

$$\tilde{x}_{0.5} - u_{1-\alpha/2} \frac{0.707 s}{\sqrt{n}} \leq \text{med} \leq \tilde{x}_{0.5} + u_{1-\alpha/2} \frac{0.707 s}{\sqrt{n}}$$

Úlohy k procvičení testu správnosti

M. Meloun, J. Militký:
Kompendium statistického zpracování dat,
Karolinum Praha 2012

25

(e) ROBUSTNÍ ODHADY PARAMETRŮ:

Medián: 2.1900 Směr. odchylka mediánu: 0.0557
95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1611** horní: **2.2189**

(f) Uřezání 5% (pro P=0.05):

Průměr: 2.2036 Směr. odchylka: 0.0430
95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1827** horní: **2.2245**

(g) Uřezání 10% (pro P=0.10):

Průměr: 2.2034 Směr. odchylka: 0.04677
95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1825** horní: **2.2242**

(h) Uřezání 40% (pro P=0.40):

Průměr: 2.1947 Směr. odchylka: 0.03974
95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1705** horní: **2.2190**

(i) Biweight:

Průměr: 2.2034 Směr. odchylka: 0.04071
95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1829** horní: **2.2239**

(j) ADAPTIVNÍ ODHADY PARAMETRŮ: Hoggovy odhady:

Průměr: 2.2053 Směr. odchylka: 0.04141
95.0% spolehlivost: Meze spodní: **2.1853** horní: **2.2252**

Závěr: Z intervalových odhadů vyplývá, že obsah vápníku 2.20 mmol/l leží v rozmezí zadané normy a naměřené výsledky jsou správné.

Test střední hodnoty ("Test správnosti")

Na úloze *Test správnosti koncentrace vápníku* ukážeme, zda má pravdu výrobce kontrolního materiálu, když uvádí koncentraci vápníku 2.20 mmol/l. Jsou výsledky správné?

Data: Koncentrace vápníku [mmol/l]:

2.26 2.16 2.18 2.15 2.23 2.25 2.19 2.18 2.16 2.20 2.19 2.22 2.19 2.21 2.25 2.29 2.26 2.15 2.18

Řešení: Z exploratorní analýzy dat byla zjištěna mírná asymetrie, posun k nižším hodnotám, v horní části řady pořádkových statistik 3 podezřelé body. Ze základních předpokladů vyplývá, že data jsou homogenní, soubor neobsahuje odlehlé hodnoty. Data mají normální rozložení a jsou nezávislá.

Analýza jednorozměrných dat (výstup programu ADSTAT)

(a) MOCNINNÁ TRANSFORMACE:	Opravený průměr: 2.2035
(b) BOX-COXOVA TRANSFORMACE:	Opravený průměr: 2.2035
(c) PARAMETRY TVARU: Šikmost: 0.4433	Špičatost: 2.120
(d) KLASICKÉ ODHADY PARAMETRŮ: Průměr: 2.2053	Směr. odchylka: 0.0414
95.0% spolehlivost:	Meze spodní: 2.1853 horní: 2.2252

Úloha B3.09 Test správnosti koncentrace cyclosporinu metodou HPLC (Horn)

Pro studii biologické dostupnosti cyclosporinu A byl zakoupen roztok této látky v metanolu. Deklarovaná koncentrace cyclosporinu A byla 20 ng/ml. Při HPLC analýzách byly naměřeny následující koncentrace. Test správnosti je třeba provést na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Obsahuje intervalový odhad střední hodnoty číslo 20 ng/ml?

Data: Koncentrace cyclosporinu A [ng/ml]: 19.96, 20.05, 20.00, 19.99, 20.01, 19.98, 20.00, 20.02, 20.01, 19.93.

t-test správnosti

Testovaná hodnota : 20
Rozdíl : Nevýznamný
Vypočtený : -0,4779397409
Teoretický : 2,262157163
Pravděpodobnost : 0,3220439398
Konfidenční interval levý: 19,97582276
Konfidenční interval pravý: 20,01417724

Exponenciální transformace dat:

Testovaná hodnota : 20
Zvolený parametr : -0,1681041718
Opravený průměr : 19,99734999
Spodní mez: 19,97277985
Horní mez: 20,01922664

Robustní parametry :

Sloupce : B309
Medián : 20
IS spodní : 19,93074902
IS horní : 20,06925098
Medianová směr. odchylka : 0,0306128072

Úloha C3.20 Test správnosti obsahu naftolu vůči normě

Obsah naftolu AS byl v dodávce stanoven spektrofotometricky. Podle normy je vyhovující vzorek takový, který obsahuje minimálně 94% stanované látky. Vyšetřete předpoklady náhodného výběru. Ověřte, zda tato dodávka vyhovuje normě. Ověření provedete na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Data: Obsah naftolu AS [%]: 94.1, 93.4, 94.1, 94.9, 92.6, 94.3, 93.9, 93.3, 94.0, 94.4, 93.6, 93.3, 94.6, 95.0, 94.7, 93.5.

t-test správnosti**Testovaná hodnota :****94**

Rozdíl : Nevýznamný
Vypočtený : -0,1126885589
Teoretický : 2,131449546
Pravděpodobnost : 0,4558858744
Konfidenční interval levý: 93,68956383
Konfidenční interval pravý: 94,27293617

Robustní parametry :

Sloupce : C320
Medián : 94,05
IS spodní : 92,74500692
IS horní : 95,35499308
Medianová směr. odchylka : 0,6122561439

33**Úloha C3.33 Test správnosti obsahu dusíku v p-nitroanilinu**

Standard p-nitroanilin obsahující 20,29 % dusíku byl podrobен elementární analýze. Bylo získáno 15 výsledků měření. Proveďte test správnosti výsledku vůči obsahu deklarovanému ve standardu využitím intervalového odhadu. Je rozdelení výběru symetrické?

Data: Obsah dusíku v p-nitroanilinu [%]: 20.315, 20.106, 20.268, 20.256, 20.224, 20.217, 20.276, 20.223, 20.122, 20.288, 20.368, 20.330, 20.296, 20.400, 20.261.

t-test správnosti

Testovaná hodnota : 20,29
Rozdíl : Nevýznamný
Vypočtený : -1,297429985
Teoretický : 2,144786688
Pravděpodobnost : 0,1077279161
Konfidenční interval levý: 20,22713233
Konfidenční interval pravý: 20,29953434

Robustní parametry :

Sloupce : C333
Medián : 20,268
IS spodní : 20,10713804
IS horní : 20,42886196
Medianová směr. odchylka : 0,07500137763

Exponenciální transformace dat:

Testovaná hodnota : 94
Zvolený parametr : -0,1485500336
Opravený průměr : 94,02560114
Spodní mez: 93,66153301
Horní mez: 94,36252409

Úloha C3.27 Test správnosti obsahu chlordiazonu v přípravku BUREX 80

Stanovení obsahu chlordiazonu v přípravku BUREX 80 bylo provedeno plynovou chromatografií. Správnost výsledku porovnáme s normou státní zkusebny pro 1. jakostní kategorii, $\mu = 80$ mg na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Je stanovení správné? Je rozdelení výběru symetrické a bez odlehých hodnot?

Data: Obsah chlordiazonu [mg] v přípravku BUREX 80:

79.70	80.80	80.30	80.50	81.00	79.90	80.50	80.90
"	"	"	"	"	"	"	"

80.30 80.10 80.20 81.40 80.70 81.20

t-test správnosti

Testovaná hodnota : 80
Rozdíl : Významný
Vypočtený : 5,850529055
Teoretický : 2,079613845
Pravděpodobnost : 4,150866157E-06
Konfidenční interval levý: 80,35935837
Konfidenční interval pravý: 80,65882345

Exponenciální transformace dat:

Testovaná hodnota : 80
Zvolený parametr : 0,06601333618
Opravený průměr : 80,49649573
Spodní mez: 80,31880491
Horní mez: 80,67942347

Robustní parametry :

Sloupce : C327
Medián : 80,5
IS spodní : 80,07558122
IS horní : 80,92441878
Medianová směr. odchylka : 0,2040853813

34**Úloha E3.07 Test správnosti obsahu síranu při analýze vody**

Pro kontrolu 35 vodohospodářských laboratoří v analýze vody byl připraven umělý vzorek s přesným obsahem síranu 94.8 mg. l⁻¹. Testujte, zda intervalový odhad střední hodnoty obsahuje tuto hodnotu. Jsou ve výběru nějaké odlehlé hodnoty?

Data: Obsah síranu SO₄²⁻ [mg. l⁻¹] ve vodě: 96.9, 110.00, 86.00, 101.70, 86.00, 85.00, 85.80, 86.50, 87.30, 103.9, 93.40, 86.90, 99.47, 115.90, 95.00, 92.80, 98.20, 98.00, 88, 97.10, 96.06, 80.20, 105.60, 122.50, 90.00, 68.00, 116.00, 89.4, 89.00, 92.50, 102.00, 83.12, 117.60, 91.35, 100.00.

35**Exponenciální transformace dat:**

Testovaná hodnota : 20,29
Zvolený parametr : -0,1663417816
Opravený průměr : 20,26914419
Spodní mez: 20,2239795
Hornímez: 20,31044788

t-test správnosti

Testovaná hodnota : 94,8
Rozdíl : Nevýznamný
Vypočtený : 0,2812964945
Teoretický : 2,032244509
Pravděpodobnost : 0,3900939559
Konfidenční interval levý: 92,05100906
Konfidenční interval pravý: 98,6461338

Exponenciální transformace dat:

Testovaná hodnota : 94,8
Zvolený parametr : 0,1329898834
Opravený průměr : 94,64197172
Spodní mez: 90,83469113
Hornímez: 98,6232698

Robustní parametry :

Sloupce : E307
Medián : 93,4
IS spodní : 85,72709918
IS horní : 101,0729008
Medianová směr. odchylka : 3,775579554

36

Úloha E3.16 Test správnosti obsahu chloru v upravené vodě

V průběhu jednoho dne byl na úpravně vody sledován po hodinách obsah chlóru v upravené vodě. Jsou ve výběru odlehle hodnoty? Dáte přednost robustním odhadům nebo mocninné transformaci? Určete parametry polohy a rozptýlení výběru a odpovídající 95%ní intervaly spolehlivosti. Dle normy je doporučená hodnota chloru 0.3 mg. l^{-1} . K testování využijte intervalového odhadu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Data: Obsah chlóru [mg. l⁻¹] v upravené vodě: 0.10, 0.15, 0.25, 0.15, 0.30, 0.25, 0.25, 0.30, 0.35, 0.55, 0.70, 0.70, 0.80, 0.65, 0.55, 0.50, 0.30, 0.35, 0.30, 0.25, 0.25, 0.20, 0.15.

t-test správnosti

Testovaná hodnota :	0,3
Rozdíl :	Nevýznamný
Vypočtený :	1,493936276
Teoretický :	2,073873068
Pravděpodobnost :	0,07469872086
Konfidenční interval levý:	0,2905807128
Konfidenční interval pravý:	0,4355062438

Exponenciální transformace dat:

Testovaná hodnota :	0,3
Zvolený parametr :	0,7146034241
Opravený průměr :	0,3112996243
Spodní mez:	0,2483155751
Horní mez:	0,3923691859

Robustní parametry :

Sloupce :	E316
Medián :	0,3
IS spodní :	0,009017566612
IS horní :	0,5909824334
Medianová směr. odchylka :	0,1403086996